学籍番号 ＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿ 氏名 ＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿

電気数学演習 II 学期末試験問題（平成 21 年 8 月 3 日）

（裏面や次の用紙にまたがって解答してはいけない。）

コード 1-1

問題 1　つぎの関数の傾き(grad) を求めなさい。(5 点)

$$f(x,y,z) = xyz^2 + y$$

$$\mathrm{grad}\, f(x,y,z) = \left(\frac{\partial}{\partial x} f(x,y,z), \frac{\partial}{\partial y} f(x,y,z), \frac{\partial}{\partial z} f(x,y,z)\right)$$

$$= \left(yz^2,\ xz^2+1,\ 2xyz\right)$$

(注) ベクトルです。

問題 2　div と rot が∇・や∇×と微分記号の内積や外積であらわされることにどのような意味があるか。(2 点)

単純に div がスカラーに，rot がベクトルになること などを答えていれば満点です。

問題 3　つぎのベクトルの発散(div) を求めなさい。(5 点)

$$\mathbf{A} = \left(xyz^2 + x, xyz^2 + y, xyz^2 + z\right)$$

$$\mathrm{div}\, A = \frac{\partial}{\partial x} A_x + \frac{\partial}{\partial y} A_y + \frac{\partial}{\partial z} A_z$$

$$= yz^2 + 1 + xz^2 + 1 + 2xyz + 1$$

$$= yz^2 + xz^2 + 2xyz + 3$$

スカラーです

問題 4　つぎのベクトルの回転（rot）を求めなさい。(１０点)

$$\mathbf{C} = \left(\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}, \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}, \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}\right)$$

$$\mathrm{rot}\, C = \left(\frac{\partial}{\partial y} C_z - \frac{\partial}{\partial z} C_y, \frac{\partial}{\partial z} C_x - \frac{\partial}{\partial x} C_z, \frac{\partial}{\partial x} C_y - \frac{\partial}{\partial y} C_x\right)$$

ここで $\frac{\partial}{\partial x} \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}} = \frac{\partial}{\partial u} u^{-\frac{1}{2}} \frac{\partial u}{\partial x}$　$(u = x^2+y^2+z^2)$

$$= -\frac{1}{2} u^{-\frac{3}{2}} \cdot 2x = -\frac{x}{(x^2+y^2+z^2)^{\frac{3}{2}}}$$

$\frac{\partial}{\partial y}$ や $\frac{\partial}{\partial z}$ も分子のみが $-y$, $-z$ になるのみなので

$$\mathrm{rot}\, C = \frac{1}{(x^2+y^2+z^2)^{\frac{3}{2}}} \left(-y+z, -z+x, -x+y\right)$$

学籍番号 ____________________

問題５　つぎの微分方程式について設問に答えなさい。(12点)　　　コード　2-5

$\boxed{2-5}$ の場合、$8f(t)-3\frac{df(t)}{dt}-20e^{2t}\sin 2t=0$　　ただし　$f(0)=3$

（１）方程式をラプラス変換しなさい。
（２）解の方程式のラプラス変換を求めなさい。
（３）微分方程式の解を求めなさい。

(1) $f(t) \xrightarrow{\mathcal{L}} F(s)$ として

$$8F(s)-3(sF(s)-3)-20\frac{2}{(s-2)^2+4}=0.$$

$\frac{1}{s-2}\times\frac{2}{s^2+4}$ とすると不正解

(2) $(8-3s)F(s)+9-\frac{40}{(s-2)^2+4}=0$

$$F(s)=\frac{-9}{8-3s}+\frac{40}{(s^2-4s+8)(8-3s)}$$

ここで右辺第2項 $=\frac{As+B}{s^2-4s+8}+\frac{C}{8-3s}$ として

$(As+B)(8-3s)+C(s^2-4s+8)=40$ だから

$-3A+C=0$ ①

$8A-3B-4C=0$ ②

$8B+8C=40$ ③

①より $A=\frac{1}{3}C$ と ③より $B=5-C$ を②に代入して、

$\frac{8}{3}C-15+3C-4C=0$ となり $C=9$, $A=3$, $B=-4$ となる。

よって

$$F(s)=\frac{-9}{8-3s}+\frac{3s-4}{s^2-4s+8}+\frac{9}{8-3s}=\frac{3(s-2)+2}{(s-2)^2+2^2}$$

(3) $f(t)=3e^{2t}\cos 2t+e^{2t}\sin 2t$

（問題５の解答欄のつづき）

$\boxed{2-1}$　$f(t)=3e^{3t}\cos 2t+4e^{3t}\sin 2t$

$\boxed{2-2}$　$f(t)=3e^{2t}\cos 3t+2e^{2t}\sin 3t$

$\boxed{2-3}$　$f(t)=e^{-4t}\cos 3t-2e^{-4t}\sin 3t$

$\boxed{2-4}$　$f(t)=2e^{-3t}\cos 3t-3e^{-3t}\sin 3t$

学籍番号 ＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿ 氏名 ＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿

電気数学演習 II 学期末試験問題（平成 21 年 8 月 3 日）
（裏面や次の用紙にまたがって解答してはいけない。）

問題６　つぎの関数をラプラス逆変換しなさい。（10 点）

$\boxed{3\text{-}3}$

$$F(s)=\frac{3s+4}{(s-1)(s^2+9)}$$

$F(s)=\dfrac{A}{s-1}+\dfrac{Bs+C}{s^2+9}$ として

$A(s^2+9)+(Bs+C)(s-1)=3s+4$ だから

$A+B=0$ —①

$-B+C=3$ —②

$9A-C=4$ —③

①+②+③より $10A=7$ となって

$A=\dfrac{7}{10},\ B=-\dfrac{7}{10},\ C=\dfrac{23}{10}$ となる

よって

$$F(s)=\frac{7}{10}\frac{1}{s-1}+\frac{-\frac{7}{10}s+\frac{23}{10}}{s^2+9}$$

$$=\frac{7}{10}\frac{1}{s-1}-\frac{7}{10}\frac{s}{s^2+3^2}+\frac{23}{30}\frac{3}{s^2+3^2}$$

$$f(t)=\frac{7}{10}e^{t}-\frac{7}{10}\cos 3t+\frac{23}{30}\sin 3t$$

$\boxed{3\text{-}1}$ $f(t)=\dfrac{9}{10}\cos 3t+\dfrac{61}{30}\sin 3t-\dfrac{9}{10}e^{-t}$

$\boxed{3\text{-}2}$ $f(t)=\dfrac{7}{10}e^{t}-\dfrac{7}{10}\cos 3t+\dfrac{43}{30}\sin 3t$

$\boxed{3\text{-}4}$ $f(t)=\dfrac{1}{5}e^{-t}-\dfrac{1}{5}\cos 2t+\dfrac{11}{10}\sin 2t$

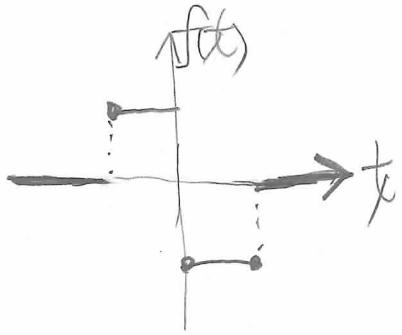
コード　3-3

問題７　つぎの関数をフーリエ変換しなさい。（６点）

$f(t)=-4 \qquad 0\le t\le 2$

$f(t)=4 \qquad -2\le t<0$

$f(t)=0 \qquad t<-2,\quad t>2$



f(t)が奇関数なので

$$F(\omega)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\,2\int_0^{\infty} f(t)\times(-i\sin\omega t)\,dt$$

$$=\frac{2}{\sqrt{2\pi}}\int_0^{2}-4i\sin\omega t\,dt$$

$$=\frac{2}{\sqrt{2\pi}}\left[\frac{4i\cos\omega t}{\omega}\right]_0^2$$

$$=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\frac{8i}{\omega}(\cos 2\omega-1)$$ 答

もちろん そのまま積分して

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\frac{4i}{\omega}\left(e^{2i\omega}+e^{-2i\omega}-2\right)$$

となってもかまわない。

学籍番号 ______________

問題８　次の関数についてつぎの設問に答えなさい。（１０点）　　　　　　　　　　　　　　　　コード　4-1

$f(t)=|\sin 2\pi t|$

（１）この関数が偶関数であることを示しなさい。

（２）この関数のフーリエ級数展開は、sin の和になるか、cos の和になるか。

（３）この関数をフーリエ級数展開しなさい。

(1) $\sin(-x) = -\sin x$ なので

$f(-t) = |\sin(-2\pi t)| = |-\sin 2\pi t| = |\sin 2\pi t|$

となるから $f(t)$ は偶関数である。

(2) 偶関数のフーリエ級数展開は定数 a_0 を含めて cos の和になる。

(3) $f(t) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos 4\pi n t$ として

(注) 周期は $\frac{1}{2}$ なので $\frac{2\pi n}{T} t = 4\pi n t$ となる

$a_0 = \frac{1}{1/2}\int_0^{\frac{1}{2}} \sin 2\pi t\, dt = 2\left[\frac{-\cos 2\pi t}{2\pi}\right]_0^{\frac{1}{2}} = \frac{2}{\pi}$

$a_n = \frac{2}{1/2}\int_0^{\frac{1}{2}} \sin 2\pi t \cos 4\pi n t\, dt$

$= 4\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{1}{2}\{\sin(2\pi t + 4\pi n t) + \sin(2\pi t - 4\pi n t)\}dt$

$= 2\left[\frac{-\cos 2\pi(2n+1)t}{2\pi + 4\pi n} + \frac{-\cos 2\pi(-2n+1)t}{2\pi - 4\pi n}\right]_0^{\frac{1}{2}}$

$= 4\left\{\frac{1}{(2n+1)2\pi} + \frac{1}{(-2n+1)2\pi}\right\}$ となり

$f(t) = \frac{2}{\pi} + \frac{2}{\pi}\left(\frac{1}{2n+1} + \frac{1}{-2n+1}\right)\cos 4\pi n t$ となる。

(　) の中は $\frac{2}{1-4n^2}$ としてもよい。

（問題８の解答欄のつづき）